**Лек 2.Линейные системы управления**

            В этом разделе рассматривается важнейший класс систем управления – линейные системы. Центральное место, которое занимают линейные системы в теории управления, обусловлено тремя основными причинами. Во-первых, многие реальные системы управления хорошо описываются линейными моделями. Во-вторых, именно для [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) разработаны сравнительно простые математические методы анализа. Основой для исследования нелинейных систем управления служит математический аппарат теории линейных систем.

            Вначале обсуждается классификация систем управления и выделяется класс [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php). Затем рассматриваются основные математические методы анализа линейных систем.

**Классификация систем управления**

            Основным типом являются **замкнутые** системы управления, которые можно представить в виде структурной схемы, приведенной на рис. 5.

            Система управления содержит управляющую подсистему или объект управления (ОУ), устройство управления (УУ) и схему сравнения входного сигнала  и выходного сигнала . При этом заданная функция времени  определяет требуемое изменение выходного сигнала  системы управления. В схеме сравнения вычисляется рассогласование , возникающее в процессе управления. Устройство управления предназначено для выработки сигналов управления .

            Математическая модель любой из систем управления включает в себя описание входных и выходных сигналов и вид преобразования входных сигналов  в выходные сигналы . Всю совокупность этих преобразований можно представить с помощью оператора : . Как следует из этой формулы, классификация систем управления может быть основана либо на свойствах входных и выходных сигналов, либо на свойствах оператора .

            Остановимся вначале на классификации систем управления по виду входных и выходных сигналов.

            Системы управления, имеющие один вход и один выход, называют **одномерными**. Системы, имеющие несколько входов или выходов, называют **многомерными.**

            Системы управления называют **непрерывными**, если входные и выходные сигналы имеют непрерывное множество значений по времени. Если сигналы поступают в дискретные моменты времени, то такие системы называют **дискретными или импульсными.**

            Дискретные системы управления с конечным числом уровней сигналов называют **цифровыми.**

            Представим реализации сигналов систем различных типов в виде графиков. На рис. 8,а изображен характерный вид сигнала в непрерывной системе. На рис. 8,б представлен характерный вид сигнала в дискретной или импульсной системе. На рис. 9 – в цифровой. Заметим, что все системы, построенные на базе ЭВМ, являются цифровыми.



Рис. 8.



Рис. 9.

            Теперь остановимся на классификации систем управления, основанной на свойствах оператора .

            Систему называют**стационарной**, если вид и свойства оператора  не изменяются во времени. Если же свойства оператора  изменяются во времени, то систему называют**нестационарной.** Стационарность означает, что вид выходного сигнала системы не зависит от сдвига по времени входного сигнала.

            Системы управления называют**линейными**, если выполняются принцип суперпозиции. Если этот принцип несправедлив, то систему называют**нелинейной**.

            Сущность принципа суперпозиции заключается в том, что линейной комбинации произвольных входных сигналов  соответствует линейная комбинация соответствующих выходных сигналов: .

            Принцип суперпозиции всегда выполняется, если выполняются следующие два условия:

1)  при суммировании любых двух входных сигналов соответствующие выходные сигналы суммируются;

2)  при любом увеличении (уменьшении) входного сигнала без изменения его формы выходной сигнал увеличивается (уменьшается) во столько же раз, также не изменяя своей формы.

            Оператор , соответствующий линейной системе, называют **линейным оператором.**Примерами линейных операторов могут служить операторы дифференцирования или интегрирования:

,      .

**Математическое описание**[**линейных систем**](http://scask.ru/a_d_23.php)**управления**

            Существует два основных, тесно связанных между собой, метода анализа линейных систем. Это анализ систем во временной области и анализ систем в частотной области. Рассмотрим вначале метод анализа систем во временной области. Для этого вспомним определение и свойства импульсной -функции Дирака. В частности, , . Запишем второе из этих свойств - функции в виде:. Тогда выходной сигнал линейной системы можно представить следующим образом:

.

            Введем функцию , которая представляет собой выходной сигнал системы управления при входном сигнале в виде -функции. Функция  называется **импульсной переходной характеристикой** системы или **весовой функцией**. Тогда выходной сигнал линейной системы при любом входном воздействии определяется по формуле:

.

            Эта формула называется**интегралом Дюамеля** или **интегралом свертки**. Ее смысл заключается в том, что выходной сигнал любой линейной системы получается с помощью взвешивания и последующего интегрирования входного сигнала  с весовой функцией .

            Наиболее прост анализ [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) управления в частотной области. Действительно, обозначим  преобразование Лапласа от , через , т. е. ; соответственно ; . Учитывая свойство [преобразования Лапласа](http://scask.ru/q_book_tpn.php?id=8) свертки функций, получаем

.

            Если в этом равенстве положить , то , где , ,  – преобразования Фурье выходного сигнала линейной системы, импульсной переходной характеристики и входного сигнала соответственно.

            Функция  или , играющая центральную роль в анализе систем, называется **передаточной функцией** системы управления. Эта комплексная функция действительного аргумента – частоты . Ее модуль  называется**амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ) системы; аргумент  – **фазочастотной характеристикой**(ФЧХ). Для анализа систем управления часто применяются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАХ):

.

            Итак, если известна передаточная функция  линейной системы, то задача определения выходного сигнала по входному решается с помощью простого умножения . Каким же образом можно найти ?

            Очень широкий класс [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) управления описывается с помощью линейных дифференциальных уравнений:

.

            Преобразуем левую и правую часть этого уравнения по Лапласу и получим следующее выражение



или , где  – передаточная функция системы управления.

            Таким образом, при заданном описании системы в виде [дифференциального уравнения](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=40) передаточная функция находится очень просто и, следовательно, легко осуществляется  анализ [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php).

**Типовые звенья систем управления**

            Рассмотрим примеры построения частотных характеристик трех звеньев, которые встречаются во многих системах автоматического управления.

**1. Интегрирующее звено**

            Предположим, что выходной сигнал звена системы управления определяется как интеграл



от входного сигнала , где  – постоянный коэффициент. После [преобразования Лапласа](http://scask.ru/q_book_tpn.php?id=8) получим

.

            Таким образом, передаточная функция интегрирующего звена запишется в виде . Амплитудно-частотная характеристика , а ФЧХ – . Для построения графика ЛАХ по оси ординат откладывают  в децибелах, а по оси абсцисс откладывают частоту  в логарифмическом масштабе (рис. 10, а).



Рис. 10.

            При этом отрезок оси абсцисс, длина которого соответствует десятикратному изменению частоты , называется**декадой**. В таком масштабе ЛАХ интегрирующего звена будет представлена прямой линией, наклон которой составляет –20 децибел на декаду. Примером интегрирующего звена служит исполнительный двигатель следящей системы (рис. 6).

**2. Апериодическое звено**

            **Апериодическим**называют звено, описываемое следующим [дифференциальным уравнением](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=40)

,

где  – постоянная времени апериодического звена. Простым примером такого звена может служить интегрирующая  цепь. Преобразуя дифференциальное уравнение по Лапласу, находим передаточную функцию апериодического звена

.

            Для апериодического звена АЧХ , а ФЧХ . Рассмотрим выражение для ЛАХ, представленное в виде

,

где .

            Такая ЛАХ может быть приближенно представлена ломаной линией, показанной на рис. 10, б. Эта приближенная характеристика составлена из двух асимптот, к которым стремится ЛАХ при  и . Действительно, при малых  отношение  и . При  , то есть характеристика представляет собой прямую, имеющую наклон –20 децибел на декаду. Обе асимптоты пересекаются в точке ; поэтому  называется**сопрягающей частотой**.

**3. Дифференцирующее звено**

Связь между выходным и входным сигналами идеального дифференцирующего звена определяется соотношением

.

Легко убедиться, что передаточная функция , АЧХ , ФЧХ . Логарифмическая АЧХ  может быть представлена на графике прямой линией, имеющей наклон к оси абсцисс  децибел на декаду.

Примером близкого к идеальному дифференцирующего звена является тахогенератор (датчик частоты вращения вала), выходное напряжение которого  пропорционально частоте вращения  его якоря, то есть . Если в качестве входной величины рассматривать не скорость вращения, а угол поворота  его якоря, то .

**Передаточные функции систем управления с обратной связью**

            Предположим, что некоторая линейная система состоит из двух последовательно соединенных подсистем, имеющих передаточные функции  и  (рис. 11).

            Очевидно, . Таким образом, при последовательном соединении [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) их передаточные функции перемножаются.



Рис. 11.

            При параллельном соединении систем (рис. 12) их передаточные функции складываются: .



Рис. 12.

            Рассмотрим теперь систему с обратной связью (рис. 13).

            Передаточная функция  называется **передаточной функцией разомкнутой системы управления**. Действительно, разрывая цепь главной обратной связи, получим . Найдем передаточную функцию замкнутой системы из следующих соотношений: , . После подстановки получаем:  или .



Рис. 13.

            Передаточная функция  называется **передаточной функцией замкнутой системы управления**.

**Пример 1.**  Реальный исполнительный двигатель обладает инерционностью и поэтому описывается следующим [дифференциальным уравнением](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=40)

.

При малой постоянной времени двигателя  частота вращения  прямо пропорциональна входному напряжению . Рассматривая в качестве выходного параметра угол поворота , видим, что при малой постоянной времени исполнительный двигатель в системе управления представляет собой интегрирующее звено. Подставляя  в дифференциальное уравнение, после преобразования по Лапласу, находим

,

т. е. реальный двигатель может быть представлен в виде последовательного соединения двух звеньев – интегрирующего с передаточной функцией  и апериодического с передаточной функцией .

**Пример 2.**  Предположим, что осуществлено параллельное соединение (рис. 12) интегрирующего звена с передаточной функцией  и безынерционного звена с передаточной функцией . Суммарная передаточная функция



соответствует последовательному соединению интегрирующего звена и так называемого форсирующего звена с передаточной функцией , где  – постоянная времени форсирующего звена. Важно, что полученное при рассмотренном параллельном соединении интегратора и усилителя форсирующее звено часто оказывается необходимым при проектировании систем автоматического управления.

**Пример 3.**  Рассмотрим более сложную систему, в цепь обратной связи которой включено звено с передаточной функцией  (рис. 14, а).



Рис. 14.

            Для определения передаточной функции замкнутой системы запишем ,  или . Таким образом, ,

где                                          

- передаточная функция замкнутой системы управления, представленной на рис. 14, а. Важным примером может служить система, показанная на рис. 14, б. Этой системе соответствует, например, последовательное соединение усилителя с коэффициентом усиления  и двигателя, охваченного обратной связью с использованием тахогенератора. При этом вал тахогенератора вращается точно так же, как вал двигателя, а напряжение  вычитается из напряжения, подаваемого на исполнительный двигатель. Такое включение тахогенератора позволяет уменьшить постоянную времени двигателя , что может быть очень важно для систем слежения за быстро перемещающимися объектами. Действительно, найдем передаточную функцию замкнутой системы, показанной на рис. 14, б:

,

где . Таким образом, выбирая , получаем систему, в которой постоянная времени уменьшена в  раз.