**Лек 2.Линейные системы управления**

            В этом разделе рассматривается важнейший класс систем управления – линейные системы. Центральное место, которое занимают линейные системы в теории управления, обусловлено тремя основными причинами. Во-первых, многие реальные системы управления хорошо описываются линейными моделями. Во-вторых, именно для [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) разработаны сравнительно простые математические методы анализа. Основой для исследования нелинейных систем управления служит математический аппарат теории линейных систем.

            Вначале обсуждается классификация систем управления и выделяется класс [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php). Затем рассматриваются основные математические методы анализа линейных систем.

**Классификация систем управления**

            Основным типом являются **замкнутые** системы управления, которые можно представить в виде структурной схемы, приведенной на рис. 5.

            Система управления содержит управляющую подсистему или объект управления (ОУ), устройство управления (УУ) и схему сравнения входного сигнала https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image001.gif и выходного сигнала https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image002.gif. При этом заданная функция времени https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image001.gif определяет требуемое изменение выходного сигнала https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image002.gif системы управления. В схеме сравнения вычисляется рассогласование https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image003.gif, возникающее в процессе управления. Устройство управления предназначено для выработки сигналов управления https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image004.gif.

            Математическая модель любой из систем управления включает в себя описание входных и выходных сигналов и вид преобразования входных сигналов https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image001.gif в выходные сигналы https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image002.gif. Всю совокупность этих преобразований можно представить с помощью оператора https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image005.gif: https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image006.gif. Как следует из этой формулы, классификация систем управления может быть основана либо на свойствах входных и выходных сигналов, либо на свойствах оператора https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image005.gif.

            Остановимся вначале на классификации систем управления по виду входных и выходных сигналов.

            Системы управления, имеющие один вход и один выход, называют **одномерными**. Системы, имеющие несколько входов или выходов, называют **многомерными.**

            Системы управления называют **непрерывными**, если входные и выходные сигналы имеют непрерывное множество значений по времени. Если сигналы поступают в дискретные моменты времени, то такие системы называют **дискретными или импульсными.**

            Дискретные системы управления с конечным числом уровней сигналов называют **цифровыми.**

            Представим реализации сигналов систем различных типов в виде графиков. На рис. 8,а изображен характерный вид сигнала в непрерывной системе. На рис. 8,б представлен характерный вид сигнала в дискретной или импульсной системе. На рис. 9 – в цифровой. Заметим, что все системы, построенные на базе ЭВМ, являются цифровыми.

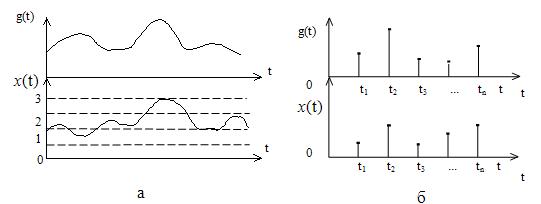


Рис. 8.

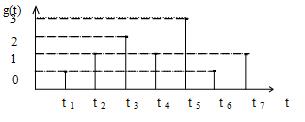


Рис. 9.

            Теперь остановимся на классификации систем управления, основанной на свойствах оператора https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image005.gif.

            Систему называют**стационарной**, если вид и свойства оператора https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image005.gif не изменяются во времени. Если же свойства оператора https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image005.gif изменяются во времени, то систему называют**нестационарной.** Стационарность означает, что вид выходного сигнала системы не зависит от сдвига по времени входного сигнала.

            Системы управления называют**линейными**, если выполняются принцип суперпозиции. Если этот принцип несправедлив, то систему называют**нелинейной**.

            Сущность принципа суперпозиции заключается в том, что линейной комбинации произвольных входных сигналов https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image009.gif соответствует линейная комбинация соответствующих выходных сигналов: https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image010.gif.

            Принцип суперпозиции всегда выполняется, если выполняются следующие два условия:

1)  при суммировании любых двух входных сигналов соответствующие выходные сигналы суммируются;

2)  при любом увеличении (уменьшении) входного сигнала без изменения его формы выходной сигнал увеличивается (уменьшается) во столько же раз, также не изменяя своей формы.

            Оператор https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image005.gif, соответствующий линейной системе, называют **линейным оператором.**Примерами линейных операторов могут служить операторы дифференцирования или интегрирования:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image011.gif,      https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image012.gif.

**Математическое описание**[**линейных систем**](http://scask.ru/a_d_23.php)**управления**

            Существует два основных, тесно связанных между собой, метода анализа линейных систем. Это анализ систем во временной области и анализ систем в частотной области. Рассмотрим вначале метод анализа систем во временной области. Для этого вспомним определение и свойства импульсной https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image013.gif-функции Дирака. В частности, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image014.gif, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image015.gif. Запишем второе из этих свойств https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image013.gif- функции в виде:https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image016.gifhttps://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image017.gif. Тогда выходной сигнал линейной системы можно представить следующим образом:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image018.gif.

            Введем функцию https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image019.gif, которая представляет собой выходной сигнал системы управления при входном сигнале в виде https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image013.gif-функции. Функция https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image020.gif называется **импульсной переходной характеристикой** системы или **весовой функцией**. Тогда выходной сигнал линейной системы при любом входном воздействии определяется по формуле:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image021.gif.

            Эта формула называется**интегралом Дюамеля** или **интегралом свертки**. Ее смысл заключается в том, что выходной сигнал любой линейной системы получается с помощью взвешивания и последующего интегрирования входного сигнала https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image001.gif с весовой функцией https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image022.gif.

            Наиболее прост анализ [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) управления в частотной области. Действительно, обозначим  преобразование Лапласа от https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image002.gif, через https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image023.gif, т. е. https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image024.gif; соответственно https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image025.gif; https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image026.gif. Учитывая свойство [преобразования Лапласа](http://scask.ru/q_book_tpn.php?id=8) свертки функций, получаем

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image027.gif.

            Если в этом равенстве положить https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image028.gif, то https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image029.gif, где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image030.gif, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image031.gif, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image032.gif – преобразования Фурье выходного сигнала линейной системы, импульсной переходной характеристики и входного сигнала соответственно.

            Функция https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image033.gif или https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image031.gif, играющая центральную роль в анализе систем, называется **передаточной функцией** системы управления. Эта комплексная функция действительного аргумента – частоты https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image034.gif. Ее модуль https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image035.gif называется**амплитудно-частотной характеристикой** (АЧХ) системы; аргумент https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image036.gif – **фазочастотной характеристикой**(ФЧХ). Для анализа систем управления часто применяются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАХ):

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image037.gif.

            Итак, если известна передаточная функция https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image033.gif линейной системы, то задача определения выходного сигнала по входному решается с помощью простого умножения https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image027.gif. Каким же образом можно найти https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image033.gif?

            Очень широкий класс [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) управления описывается с помощью линейных дифференциальных уравнений:

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image038.gif.

            Преобразуем левую и правую часть этого уравнения по Лапласу и получим следующее выражение

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image039.gif

или https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image027.gif, где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image040.gif – передаточная функция системы управления.

            Таким образом, при заданном описании системы в виде [дифференциального уравнения](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=40) передаточная функция находится очень просто и, следовательно, легко осуществляется  анализ [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php).

**Типовые звенья систем управления**

            Рассмотрим примеры построения частотных характеристик трех звеньев, которые встречаются во многих системах автоматического управления.

**1. Интегрирующее звено**

            Предположим, что выходной сигнал звена системы управления определяется как интеграл

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image041.gif

от входного сигнала https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image001.gif, где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image042.gif – постоянный коэффициент. После [преобразования Лапласа](http://scask.ru/q_book_tpn.php?id=8) получим

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image043.gif.

            Таким образом, передаточная функция интегрирующего звена запишется в виде https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image044.gif. Амплитудно-частотная характеристика https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image045.gif, а ФЧХ – https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image046.gif. Для построения графика ЛАХ по оси ординат откладывают https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image047.gif в децибелах, а по оси абсцисс откладывают частоту https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image034.gif в логарифмическом масштабе (рис. 10, а).

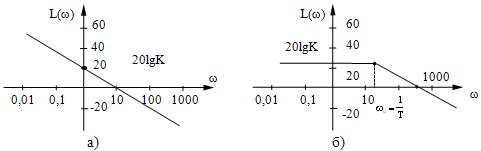


Рис. 10.

            При этом отрезок оси абсцисс, длина которого соответствует десятикратному изменению частоты https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image034.gif, называется**декадой**. В таком масштабе ЛАХ интегрирующего звена будет представлена прямой линией, наклон которой составляет –20 децибел на декаду. Примером интегрирующего звена служит исполнительный двигатель следящей системы (рис. 6).

**2. Апериодическое звено**

**Апериодическим**называют звено, описываемое следующим [дифференциальным уравнением](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=40)

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image049.gif,

где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image050.gif – постоянная времени апериодического звена. Простым примером такого звена может служить интегрирующая https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image051.gif цепь. Преобразуя дифференциальное уравнение по Лапласу, находим передаточную функцию апериодического звена

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image052.gif.

            Для апериодического звена АЧХ https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image053.gif, а ФЧХ https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image054.gif. Рассмотрим выражение для ЛАХ, представленное в виде

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image055.gif,

где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image056.gif.

            Такая ЛАХ может быть приближенно представлена ломаной линией, показанной на рис. 10, б. Эта приближенная характеристика составлена из двух асимптот, к которым стремится ЛАХ при https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image057.gif и https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image058.gif. Действительно, при малых https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image034.gif отношение https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image059.gif и https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image060.gif. При https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image061.gif https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image062.gif, то есть характеристика представляет собой прямую, имеющую наклон –20 децибел на декаду. Обе асимптоты пересекаются в точке https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image063.gif; поэтому https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image064.gif называется**сопрягающей частотой**.

**3. Дифференцирующее звено**

Связь между выходным и входным сигналами идеального дифференцирующего звена определяется соотношением

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image065.gif.

Легко убедиться, что передаточная функция https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image066.gif, АЧХ https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image067.gif, ФЧХ https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image068.gif. Логарифмическая АЧХ https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image069.gif может быть представлена на графике прямой линией, имеющей наклон к оси абсцисс https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image070.gif децибел на декаду.

Примером близкого к идеальному дифференцирующего звена является тахогенератор (датчик частоты вращения вала), выходное напряжение которого https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image071.gif пропорционально частоте вращения https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image072.gif его якоря, то есть https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image073.gif. Если в качестве входной величины рассматривать не скорость вращения, а угол поворота https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image074.gif его якоря, то https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image075.gif.

**Передаточные функции систем управления с обратной связью**

            Предположим, что некоторая линейная система состоит из двух последовательно соединенных подсистем, имеющих передаточные функции https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image076.gif и https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image077.gif (рис. 11).

            Очевидно, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image078.gif. Таким образом, при последовательном соединении [линейных систем](http://scask.ru/a_d_23.php) их передаточные функции перемножаются.

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image079.jpg

Рис. 11.

            При параллельном соединении систем (рис. 12) их передаточные функции складываются: https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image080.gif.

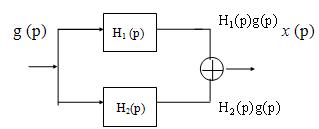


Рис. 12.

            Рассмотрим теперь систему с обратной связью (рис. 13).

            Передаточная функция https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image033.gif называется **передаточной функцией разомкнутой системы управления**. Действительно, разрывая цепь главной обратной связи, получим https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image082.gif. Найдем передаточную функцию замкнутой системы из следующих соотношений: https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image083.gif, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image084.gif. После подстановки получаем: https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image085.gif или https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image086.gif.

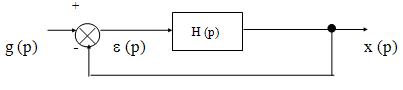


Рис. 13.

            Передаточная функция https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image088.gif называется **передаточной функцией замкнутой системы управления**.

**Пример 1.**  Реальный исполнительный двигатель обладает инерционностью и поэтому описывается следующим [дифференциальным уравнением](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=40)

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image089.gif.

При малой постоянной времени двигателя https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image090.gif частота вращения https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image072.gif прямо пропорциональна входному напряжению https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image091.gif. Рассматривая в качестве выходного параметра угол поворота https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image092.gif, видим, что при малой постоянной времени исполнительный двигатель в системе управления представляет собой интегрирующее звено. Подставляя https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image093.gif в дифференциальное уравнение, после преобразования по Лапласу, находим

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image094.gif,

т. е. реальный двигатель может быть представлен в виде последовательного соединения двух звеньев – интегрирующего с передаточной функцией https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image095.gif и апериодического с передаточной функцией https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image096.gif.

**Пример 2.**  Предположим, что осуществлено параллельное соединение (рис. 12) интегрирующего звена с передаточной функцией https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image097.gif и безынерционного звена с передаточной функцией https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image098.gif. Суммарная передаточная функция

https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image099.gif

соответствует последовательному соединению интегрирующего звена и так называемого форсирующего звена с передаточной функцией https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image100.gif, где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image101.gif – постоянная времени форсирующего звена. Важно, что полученное при рассмотренном параллельном соединении интегратора и усилителя форсирующее звено часто оказывается необходимым при проектировании систем автоматического управления.

**Пример 3.**  Рассмотрим более сложную систему, в цепь обратной связи которой включено звено с передаточной функцией https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image076.gif (рис. 14, а).

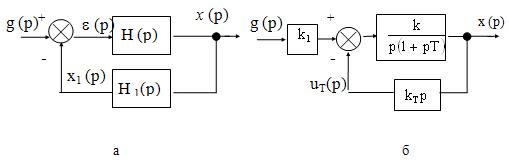
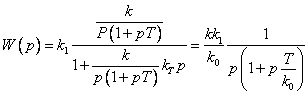


Рис. 14.

            Для определения передаточной функции замкнутой системы запишем https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image103.gif, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image016.gifhttps://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image104.gif или https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image105.gif. Таким образом, https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image106.gif,

где                                          https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image107.gif

- передаточная функция замкнутой системы управления, представленной на рис. 14, а. Важным примером может служить система, показанная на рис. 14, б. Этой системе соответствует, например, последовательное соединение усилителя с коэффициентом усиления https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image108.gif и двигателя, охваченного обратной связью с использованием тахогенератора. При этом вал тахогенератора вращается точно так же, как вал двигателя, а напряжение https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image109.gif вычитается из напряжения, подаваемого на исполнительный двигатель. Такое включение тахогенератора позволяет уменьшить постоянную времени двигателя https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image050.gif, что может быть очень важно для систем слежения за быстро перемещающимися объектами. Действительно, найдем передаточную функцию замкнутой системы, показанной на рис. 14, б:

,

где https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image111.gif. Таким образом, выбирая https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image112.gif, получаем систему, в которой постоянная времени уменьшена в https://scask.ru/htm/sernam/book_tau/files/tau_12.files/image113.gif раз.